This paper was published in the journal *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences, Paris*, **320**, Série I (1995) 1449–1452.

Sur l'inversion de $y^\alpha e^y$ au moyen des nombres de Stirling associés

David J. Jeffrey, Robert M. Corless, David E. G. Hare, et Donald E. Knuth

Résumé — La fonction $y = \Phi_\alpha(x)$, solution de $y^\alpha e^y = x$ pour x, y assez grands, possède un développement suivant les puissances de $\ln x$ et $\ln\ln x$ dont les coefficients font intervenir les nombres orbites de Stirling. Il est montré que ce développement converge lorsque $x > (\alpha e)^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Il est aussi démontré que de nouveaux développements utilisant les nombres de Stirling associés peuvent être obtenus pour Φ_α. Ces nouveaux développements convergent plus rapidement et sur un domaine élargi.

On the inversion of $y^\alpha e^y$ in terms of associated Stirling numbers

Abst

Démonstration. – Nous rappelons quelques détails de la preuve que l'on retrouve dans [5], car ils nous serviront plus loin. Nous introduisons la fonction $w(x)$ définie par

$$y = \Phi_\alpha(x) = L_1 - \alpha L_2 + \alpha w \ , \tag{2b}$$

et qui satisfait donc à

$$1 - e^{-w} + \sigma w - \tau = 0, \qquad \sigma = \frac{\alpha}{L_1}, \qquad \tau = \alpha \frac{L_2}{L_1} = \sigma \ln\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \ . \tag{2c}$$

De la formule d'inversion de Lagrange [4], nous obtenons le développement

$$w = \sum_{m \geq 1} \frac{\tau^m}{m!} \sum_{l \geq 0} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix} \sigma^l \ . \tag{2d}$$

Il suffit d'exprimer σ et τ en fonction de L_1 and L_2 pour obtenir le théorème.

Le domaine de convergence de $(2a)$ est décrit seulement comme $\ll x$ assez grand $\gg$ par de Bruijn et Comtet. Nous énonçons donc maintenant un théorème plus précis.

Théorème 2. — *Pour $\alpha \geq 1$, la série (2a) est convergente si $x > (\alpha e)^\alpha$, tandis que pour*

Pour utiliser la formule d'inversion de Lagrange, introduisons l'opérateur $[w^p]$ qui représente le coefficient de w^p dans un développement en s´

Démonstration. — La preuve est la même que celle du théorème 3.

Nous pouvons continuer le processus engendrant des séries en terme de nouvelles variables. En effet, si $w(\sigma, \tau)$ satisfait $(2c)$, alors le théorème 4 est équivalent à l'identité

$$w(\sigma, \tau) = -\ln(1-\tau) + w\left(\frac{\sigma}{1-\tau}, \frac{\sigma\ln(1-\tau)}{1-\tau}\right) \ , \tag{4d}$$